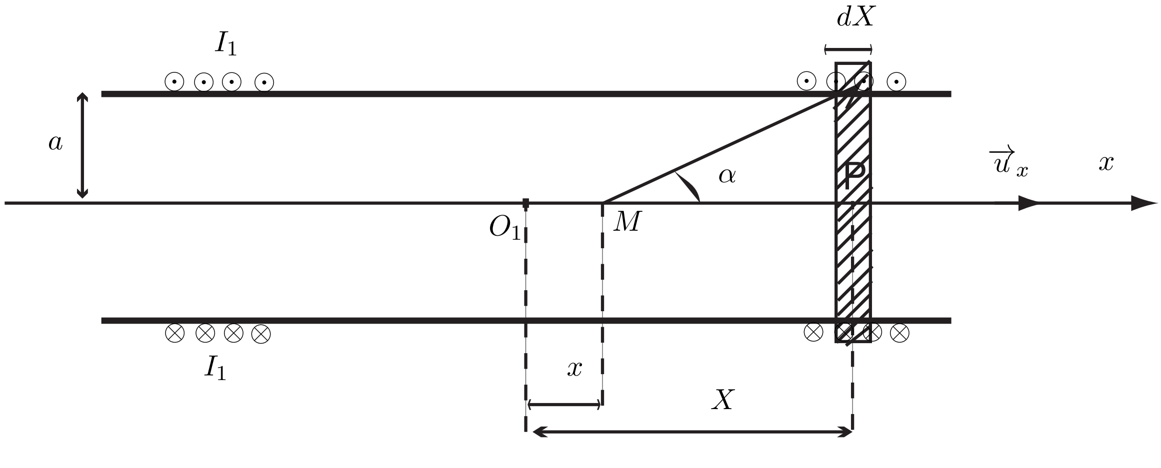
Corrigé proposé par :
M. Afekir - École Royale de l'Air
CPGE Marrakech
cpgeafek@yahoo.fr

Résonance magnétique nucléaire - RMN -

Première partie
Champ magnétique tournant

1.1. Solénoïde (S_1) , infiniment long, comportant n spires circulaires, jointives, par unité de longueur.

1.1.1. Solénoïde (S_1)= superposition de n spires circulaires jointives par unité de longueur, on utilisera donc l'expression du champ crée par une spire sur son axe. $OM = x$. Par superposition, le champ $\overrightarrow{B}(M)$ crée en un point M de l'axe O_1x est la somme vectorielle des champs produits par chacune des spires (de rayons a) parcourues par le même courant I_1.



Le champ magnétique crée par une spire en tout point M de son axe : $\vec{b}(M) = \dfrac{\mu_o I_1}{2a}\sin^3\alpha\,\vec{u}_x$

Le champ magnétique élémentaire crée par une tranche d'épaisseur dX vaut , en M :

$$d\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_o I_1}{2a} dn \sin^3\alpha \vec{u}_x$$

dn désigne le nombre de spires contenues dans la tranche dX :

$$dn = n\,dX \quad \text{avec} \quad X = x + a\,\text{cotan}\alpha \quad \Rightarrow \quad dn = -na\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\text{Donc} \quad : \quad \overrightarrow{B}(M) = -\frac{\mu_o I_1}{2} n\int_0^\pi \sin\alpha\,d\alpha\,\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{B}(M) = \mu_o n I_1\,\vec{u}_x}$$

1.1.2. Symétrie

Tout plan contenant Ox est un plan d'antisymétrie pour la distribution du courant, le pseudo-vecteur $\overrightarrow{B}$ appartient à un plan d'*antisymétrie*. $\overrightarrow{B}$, en tout point M de Ox, est donc porté par Ox.

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B(M)\vec{u}_x}$$

1.1.3. Invariance (coordonnées cylindriques)

◇ On a invariance de la distribution par rotation autour de Ox . donc $\overrightarrow{B}(M)$ est indépendant de θ :

$$\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}(r,\theta,x) = \overrightarrow{B}(r,x)$$

◇ On a invariance de la distribution le long de l'axe Ox . donc $\overrightarrow{B}(M)$ est indépendant de x :

$$\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}(r,x) = \overrightarrow{B}(r)$$

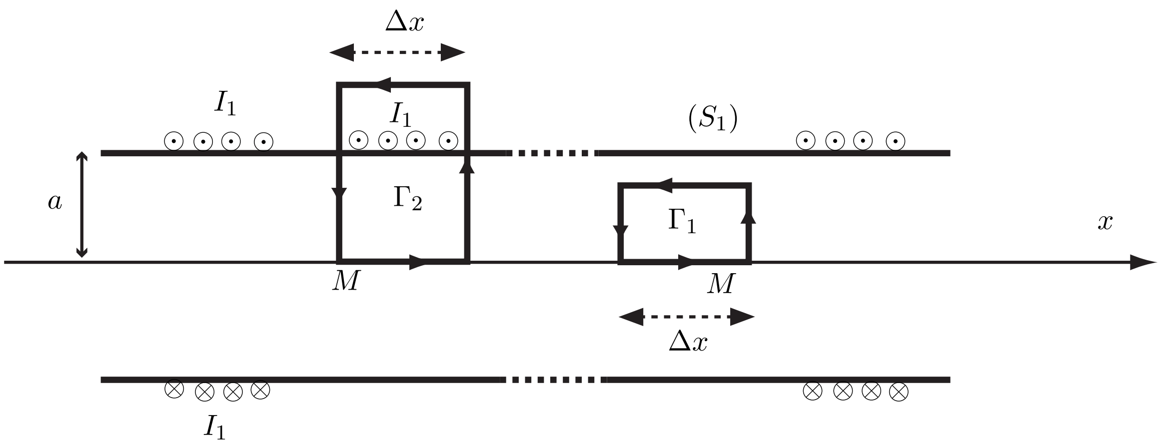
D'où : le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ en un point M de l'axe Ox du solénoïde ne dépend que de la coordonnée radiales du système de coordonnées cylindriques.

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = B(r)\vec{u}_x}$$

1.1.4. Théorème d'Ampère

◇ *Symétrie et invariance* : $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\vec{u}_x$

◇ *Choix du contour* : On choisit un contour rectangulaire(d'un coté $r = 0$ où $\overrightarrow{B}(M)$ connu, et l'autre à une distance r où $\overrightarrow{B}(M)$ est à déterminer).



Théorème d'Ampère : Soit $M \in \Gamma_i$ tel que $B_1(M) = \mu_o n I_1$

$$\text{D'où : } \oint_{(\Gamma_i)} \overrightarrow{B}(M).\vec{dl} = \mu_o I_{enlacee\ par\ le\ contour\ (\Gamma_i)}$$

$$\begin{cases} r < a \ : \ \oint_{(\Gamma_1)} \overrightarrow{B}(M) = B_1\Delta x - B_{\text{int}}\Delta x = \mu_o I_{enlacees} = 0 \ \Rightarrow \ B_{\text{int}} = B_1 \\ r > a \ : \ \oint_{(\Gamma_2)} \overrightarrow{B}(M) = B_1\Delta x - B_{\text{ext}}\Delta x = \mu_o I_{enlacees} = \mu_o n I_1 \ \Rightarrow \ B_{\text{ext}} = 0 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> :
$$\begin{cases} \text{A l'inté rieur de } (S_1) \ : \ \boxed{\overrightarrow{B}_{\text{int}} = \overrightarrow{B}_1(M) = \mu_o n I_1 \, \vec{u}_x} \\ \text{A l'exté rieur de } (S_1) \ : \ \boxed{\overrightarrow{B}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0}} \end{cases}$$

1.1.5. Coefficient d'inductance propre de (S_1) Le champ magnétique $\overrightarrow{B}_1(M)$ est uniforme à l'intérieur du solénoïde (S_1). Le flux de ce champ à travers la section (S) de (S_1) :

$$\Phi_1 = \overrightarrow{B}_1.\overrightarrow{S} = \mu_o n I_1 \pi a^2 = \Lambda I_1 \implies \boxed{\Lambda = \mu_o n \pi a^2}$$

1.2. Solénoïdes croisés

1.2.1. $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi_1)$

<u>En notation complexe</u> : $\begin{cases} \underline{u}(t) = R\underline{i}_1(t) + L\dfrac{d\underline{i}_1(t)}{dt} + \dfrac{\underline{q}(t)}{C} = \left(R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\right)\underline{i}_1(t) \\ \underline{i}_1(t) = I_1\sqrt{2}\,\exp j\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4} + \varphi_1\right) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U\sqrt{2}\exp j\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(-\varphi_1) = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}}$$

1.2.2. $i_2(t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega t - \frac{\pi}{4} + \varphi_2)$

<u>En notation complexe</u> : $\begin{cases} \underline{u}(t) = R\underline{i}_2(t) + L\dfrac{d\underline{i}_2(t)}{dt} = (R + jL\omega)\,\underline{i}_2(t) \\ \underline{i}_1(t) = I_2\sqrt{2}\,\exp j\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4} + \varphi_2\right) \quad \text{et} \quad \underline{u}(t) = U\sqrt{2}\,\exp j\left(\omega t - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_2 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(-\varphi_2) = \frac{L\omega}{R}}$$

1.2.3. cas où $\varphi_2 = -\varphi_1$

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = -L\omega \quad \text{ou} \quad \boxed{2LC\omega^2 = 1}$$

1.2.4. $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \tan(\varphi_2)\tan(\varphi_1) = -1 \quad \text{ou} \quad \boxed{L^2\omega^2 - \frac{L}{C} = -R^2}$$

1.2.5. Dans les conditions 1.2.3. et 1.2.4. :

$$L\omega = R \quad \text{soit :} \quad \boxed{I_2 = \frac{L\omega}{R}I_1 = I_1 = \frac{U}{R\sqrt{2}}}$$

1.2.6. Dans le cadre de l'**ARQP** (Approximation des Régimes Quasi-Permanents : le courant déplacement est négligeable devant le courant de conduction), les équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_o\overrightarrow{j} \quad (MA) \qquad \text{et} \qquad div\overrightarrow{B} = 0 \quad (MF)$$

On retrouve, ainsi, la forme des équations de maxwell (MA et MF) en régime magnétostatique ; par conséquent les résultats utilisés en 1.1. restent valables dans le cadre de l'**ARQP**.

1.2.6.1. Théorème de superposition pour le champ magnétique $\overrightarrow{B}$

Le champ résultant $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2$ avec $\overrightarrow{B}_i$: champ crée, en O par le solénoïde S_i

D'après ce qui précède :

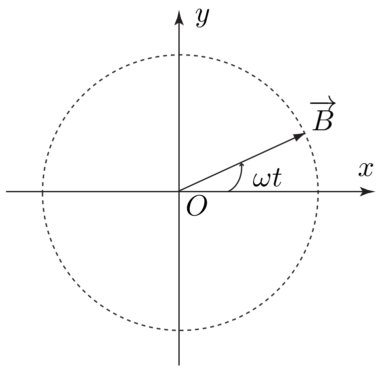
$$\overrightarrow{B} = \mu_o n i_1(t)\overrightarrow{u}_x + \mu_o n i_2(t)\overrightarrow{u}_y = \mu_o n\frac{U}{R}\left(\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x + \cos(\omega t - \phi_1 + \phi_2)\overrightarrow{u}_y\right)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{Soit :} \quad \boxed{\overrightarrow{B} = \mu_o n\frac{U}{R}\left[\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x + \sin(\omega t)\overrightarrow{u}_y\right]}$$

1.2.6.2.

Il s'agit du champ magnétique de module constant B tournant, à la vitesse angulaire ω, dans le plan (xOy) et dans le sens trigonométrique.

$$B = \mu_o n \frac{U}{R}$$



1.2.6.3. Applications numériques :

$$I_1 = I_2 = 7mA \quad ; \quad C = 400nF \quad ; \quad L = 0,32mH \quad \text{et} \quad B = 1,25.10^{-5}T$$

1.2.7. Le rôle du condensateur est d'introduire le déphasage entres les courants d'intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

1.2.8. Pour inverser le sens de rotation du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ total, on doit brancher le condensateur en série avec le solénoïde S_2, l'expression de $\overrightarrow{B}$ et telle que :

$$\overrightarrow{B} = \mu_o n \frac{U}{R}\left(\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})\overrightarrow{u}_x + \cos(\omega t)\overrightarrow{u}_y\right) = \mu_o n \frac{U}{R}\left(\sin(\omega t)\overrightarrow{u}_x + \cos(\omega t)\overrightarrow{u}_y\right)$$

Deuxième partie
Théorie élémentaire de la RMN

2.1. $\overrightarrow{B_o} = B_o \overrightarrow{u}_z \, (B_o > 0)$

2.1.1. Théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel $\mathcal{R}$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{\mathsf{R}} = \overrightarrow{M} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma}\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \wedge \overrightarrow{B}_o \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \wedge \overrightarrow{B}_o}$$

2.1.2. D'après l'équation précédente :

<u>Projection suivant $\vec{m}$</u> : $\vec{m}.\frac{d\vec{m}}{dt} = 0 = \frac{1}{2}\frac{d\,\|\vec{m}\|}{dt} \Rightarrow \boxed{\|\vec{m}\| \text{ est constante}}$

<u>Projection suivant $\vec{u}_z$</u> : $\vec{u}_z\frac{d\vec{m}}{dt} = 0 = \frac{dm_z}{dt} \Rightarrow \boxed{m_z \text{ est constante}}$

2.1.3. Soit α, l'angle entre $\vec{m}$ et $\overrightarrow{B}_o$:

$$\vec{m}.\overrightarrow{B}_o = m_z B_o = \|\vec{m}\| \, B_o \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{m_z}{\|\vec{m}\|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \text{ est constant}}$$

2.1.4. Par projection, dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, de l'équation établie en 2.1.1., on a :

$$\begin{pmatrix} \frac{dm_x}{dt} \\ \frac{dm_y}{dt} \\ \frac{dm_z}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_o \end{pmatrix} = \gamma B_o \begin{pmatrix} m_y \\ -m_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit le système d'é quations différentielles : $\begin{cases} \dfrac{dm_x}{dt} - \gamma B_o m_y = 0 \\ \dfrac{dm_y}{dt} + \gamma B_o m_y = 0 \\ \dfrac{dm_z}{dt} = 0 \end{cases}$

On pose : $\underline{m} = m_x + jm_y \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{d\underline{m}}{dt} + j\gamma B_o \underline{m} = 0}$

$\underline{Solution}$: $\underline{m} = m_o \exp j\gamma B_o$ d'où : $\begin{cases} \boxed{m_x(t) = m_o \cos(\gamma B_o t)} \\ \text{et} \\ \boxed{m_y(t) = -m_o \sin(\gamma B_o t)} \end{cases}$

2.1.5. Précession de Larmor

$$\vec{m} = m_o \left(\cos(\gamma B_o t)\,\vec{u}_x + \sin(\gamma B_o t)\,\vec{u}_y\right) + m_z\vec{u}_z$$

D'où mouvement de précission autour de Oz (ou dans le plan) (xOy) à la pulsation :

$$\boxed{\vec{\omega}_o = -\gamma B_o \vec{u}_z = -\gamma \overrightarrow{B}_o} \quad \text{tel que : } \quad |\vec{\omega}_o| = \gamma B_o$$

2.1.6. Application numérique

$$\omega_o = -2,7 \times 10^8 \ s^{-1} \quad \text{et} \quad f_o = \frac{|\omega_o|}{2\pi} = 0,43.10^8 \ Hz$$

Cette fréquence f_o se situe dans le domaine Hertzien.

2.2. $\overrightarrow{B}_{tot} = \overrightarrow{B}_o\vec{u}_z + \overrightarrow{B}_1\vec{u}_X$ tel que : $0 < B_1 << B_o$

2.2.1. En appliquant le résultat de la question 2.1.1.

$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \gamma\vec{m}\wedge(B_o\vec{u}_z + B_1\vec{u}_X) = -\vec{m}\wedge(\omega_o\vec{u}_z + \omega_1\vec{u}_X) = -\vec{m}\wedge(\vec{\omega}_o + \vec{\omega}_1)$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\vec{m}\wedge(\vec{\omega}_o + \vec{\omega}_1)}$$

2.2.2. $\mathcal{R}_1$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$. En appliquant le résultat de la dérivée d'un vecteur par rapport au temps dans un changement de référentiels :

$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}\wedge\vec{m} = -\vec{m}\wedge(\vec{\omega}_o + \vec{\omega}_1) \Rightarrow \left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{m}\wedge(\vec{\omega} - \vec{\omega}_o - \vec{\omega}_1)$$

$$\text{Soit} \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \vec{m}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega} - \vec{\omega}_1\right)}$$

2.2.3. Le moment magnétique $\vec{m}$ effectue, dans $\mathcal{R}_1$, un mouvement de précession autour de $\vec{u}$ à la *pulsation* $\overrightarrow{\Omega}_1 = \overrightarrow{\omega}_1 - \overrightarrow{\Omega}$ (vecteur rotation instantané autour de $\vec{u}$) tel que : $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega}_1$.

Projection suivant Oz :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_1.\vec{u}_z = \left\|\overrightarrow{\Omega}_1\right\|\cos\theta \\ \overrightarrow{\Omega}_1.\vec{u}_z = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega} + \vec{\omega}_o).\vec{u}_z = \omega_o - \omega \\ \left\|\overrightarrow{\Omega}_1\right\| = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega-\omega_o)^2} = \sqrt{\gamma^2 B_1^2 + (\omega-\omega_o)^2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\omega_o - \omega}{\sqrt{\gamma^2 B_1^2 + (\omega-\omega_o)^2}}}$$

2.2.4. Le mouvement de $\overrightarrow{\Omega}_1 = \vec{\omega}_1 - \overrightarrow{\Omega}$ relativement à $\mathcal{R}$, est celui du repère $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$ (car $\overrightarrow{\Omega}_1$ est un vecteur de $\mathcal{R}_1$) : $\overrightarrow{\Omega}_1$ est, donc, animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz, à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_z$.
Le mouvement du moment magnétique $\vec{m}$ dans $\mathcal{R}$ est, donc, une *précession* et une *rotation*.

2.2.5. On pose : $\vec{m}_z = m_z\vec{u}_z$

2.2.5.1. $\overrightarrow{\Omega} = \vec{0}$. D'après 2.2.2.

$$\left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = -\vec{m}\wedge\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1\wedge\vec{m}$$

La composante $\vec{m}_z$ subit un premier retournement au bout d'un temps Δt telle que :

$$\Delta t = \frac{T_1}{2} = \frac{\pi}{|\omega_1|} = \frac{\pi}{\gamma B_1}$$

2.2.5.2. Application numérique :

$$\Delta t = 11,6\ ms$$

2.3. Prise en compte de la relaxation

2.3.1. Relaxation d'un moment magnétique

$$\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_{\text{relaxation}} = -\frac{\overrightarrow{M} - \overrightarrow{M}_o}{\tau}$$

2.3.1.1. τ est homogène à un temps. Son unité dans le (SI) est la *seconde*.

2.3.1.2. Résolution de l'équation différentielle

De l'équation : $\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_{\text{relaxation}} + \frac{\overrightarrow{M}}{\tau} = \frac{\overrightarrow{M}_o}{\tau}$, on en déduit que : $\overrightarrow{M}(t) = \overrightarrow{M}_o + \overrightarrow{C}\exp - \frac{t}{\tau}$

Compte tenu des considération expérimentale citée : $\begin{cases} \overrightarrow{M}(t_o) = 0 \\ \overrightarrow{C} = -\overrightarrow{M}_o \exp\frac{t_o}{\tau} \end{cases}$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{M}(t) = \overrightarrow{M}_o\left(1 - \exp - \frac{t-t_o}{\tau}\right)}$; d'où le ré sultat !

2.3.2. Équations de Bloch

2.3.2.1. En utilisant les questions **2.2.2** et **2.3.1**, ainsi que l'hypothèse admise en **2.3** :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_{R_1} = \overrightarrow{M}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega} - \vec{\omega}_1\right) + \left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_{\text{relaxation}} = \overrightarrow{M}\wedge\left(\overrightarrow{\Omega} - \vec{\omega}_1\right) - \frac{\overrightarrow{M}}{\tau} + \frac{\overrightarrow{M}_o}{\tau}$$

Soit l'équation : $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_{R_1} + \frac{\overrightarrow{M}}{\tau} - \overrightarrow{M}\wedge(\Omega\vec{u}_z - \omega_1\vec{u}_X) = \frac{M_o}{\tau}\vec{u}_z}$

2.3.2.2. Équations de Bloch

$$\overrightarrow{M}_{(\vec u_X,\vec u_Y,\vec u_z)}\begin{pmatrix} M_X\\ M_Y\\ M_z\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{M}\wedge(\Omega\vec u_z - \omega_1\vec u_X) = \begin{pmatrix}\Omega M_Y\\ -\omega_1 M_z-\Omega M_X\\ M_Y\omega_1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{dM_X}{dt} = \Omega M_Y - \dfrac{M_X}{\tau} = M_o\left(\Omega v - \dfrac{u}{\tau}\right)\\[2mm] \dfrac{dM_Y}{dt} = -\omega_1 M_z - \Omega M_X - \dfrac{M_Y}{\tau} = -\omega_1 M_z - M_o\left(\Omega u + \dfrac{v}{\tau}\right)\\[2mm] \dfrac{dM_z}{dt} = M_Y\omega_1 - \dfrac{M_z}{\tau} + \dfrac{M_o}{\tau} = -\dfrac{M_z}{\tau} + M_o\left(\omega_1 v + \dfrac{1}{\tau}\right)\end{cases}$$

D'où les équations de bloch :

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{u}{\tau} = \Omega v\\[2mm] \dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = -\omega_1\dfrac{M_z}{M_o} - \Omega u\\[2mm] \dfrac{dM_z}{dt} + \dfrac{M_z}{\tau} = M_o\left(\omega_1 v + \dfrac{1}{\tau}\right)\end{cases}}$$

2.3.3. Régime permanent dans le référentiel R_1

2.3.3.1.

En ré gime permanent :

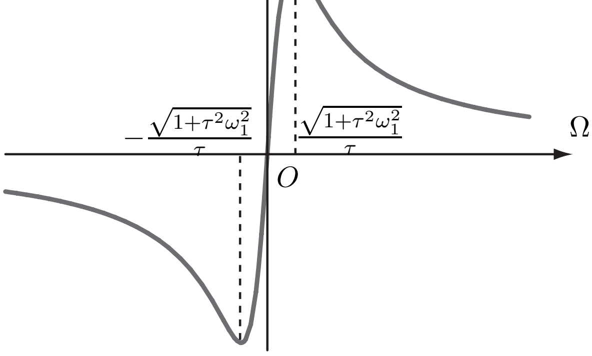
$$\begin{cases}\dfrac{u}{\tau} = \Omega v & (1)\\[2mm] v = -\tau\left(\omega_1\dfrac{M_z}{M_o} + \Omega u\right) & (2)\\[2mm] \dfrac{M_z}{M_o} = \tau\left(\omega_1 v + \dfrac{1}{\tau}\right) & (3)\end{cases}$$

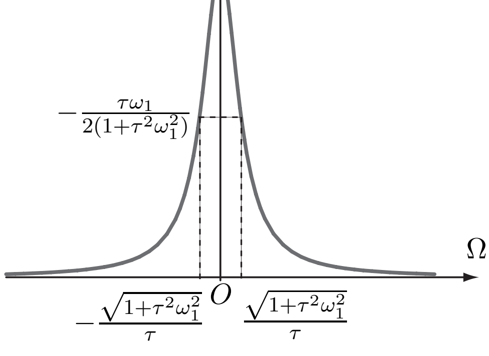
- ◇ (1) et (3) dans (2) donne : $v\left(M_o + \Omega^2\tau^2 + \omega_1^2\tau^2\right) = -\tau\omega_1 \quad (4)$
- ◇ (4) dans (1) donne : $u\left(M_o + \Omega^2\tau^2 + \omega_1^2\tau^2\right) = -\tau^2\Omega\omega_1$
- ◇ (4) dans (3) donne : $(M_z - M_o)\left(M_o + \Omega^2\tau^2 + \omega_1^2\tau^2\right) = -M_o\tau^2\omega_1^2$

Soient :

$$\boxed{\begin{cases} u = -\dfrac{\tau^2\omega_1\Omega}{1 + (\tau\omega_1)^2 + (\tau\Omega)^2}\\[2mm] v = -\dfrac{\tau\omega_1}{1 + (\tau\omega_1)^2 + (\tau\Omega)^2}\\[2mm] M_z = M_o - M_o\dfrac{(\tau\omega_1)^2}{1 + (\tau\omega_1)^2 + (\tau\Omega)^2}\end{cases}} \qquad (7)$$

2.3.3.2. Allures des courbes $u(\Omega)$ et $v(\Omega)$





2.3.3.3. Largeur à mi-hauteur $\Delta\Omega$ de la courbe $v(\Omega)$:

$$v(\Omega) = \frac{v_{max}}{2} \iff -\frac{\tau\omega_1}{1 + (\tau\omega_1)^2 + (\tau\Omega)^2} = -\frac{\tau\omega_1}{2\left(1 + (\tau\omega_1)^2\right)} \Longrightarrow \Omega_{12} = \pm\sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}}$$

$$\text{soit : } \boxed{\Delta\Omega = 2\sqrt{\omega_1^2 + \frac{1}{\tau^2}}}$$

2.3.4. Dans la pratique , le champ $\overrightarrow{B}_1$ est remplacé par $\overrightarrow{B}_2 = 2B_1\cos(\omega' t)\vec{u}_x \quad (\omega' > 0)$.

2.3.4.1. Décomposition du champ $\overrightarrow{B}_2$

$$\overrightarrow{B}_2 = B_1\cos(\omega' t)\vec{u}_x + B_1\cos(\omega' t)\vec{u}_x = B_1\cos(\omega' t)\vec{u}_x + B_1\cos(\omega' t)\vec{u}_x + B_1\sin(\omega' t)\vec{u}_y - B_1\sin(\omega' t)\vec{u}_y$$

<u>On pose</u> :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_2^+ = B_1\left(\cos(\omega' t)\vec{u}_x + \sin(\omega' t)\vec{u}_y\right) \text{ et } \overrightarrow{B}_2^- = B_1\left(\cos(\omega' t)\vec{u}_x - \sin(\omega' t)\vec{u}_y\right)}$$

$$\text{Soit : } \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_2^+ + \overrightarrow{B}_2^-$$

2.3.4.2. On pose : $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\omega}' - \overrightarrow{\omega}_o$

$$\text{A la résonance : } \quad \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\omega}' = \overrightarrow{\omega}_o = -\gamma B_o\vec{u}_z = \omega'\vec{u}_z \qquad (\omega' < 0)$$

C'est, donc, la composante $\overrightarrow{B}_2^-$ qui permet d'atteidre cette résonance $\Longrightarrow \overrightarrow{B}_2(t) = \overrightarrow{B}_2^-$
Le vecteur rotation instantané de cette composante est $\overrightarrow{\omega}'_- = -\omega'\vec{u}_z$

2.3.4.3. ! ! ! ! ! !

2.4. Détection de la réponse du milieu

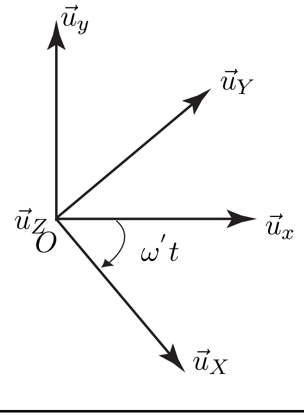
2.4.1. La bobine étant d'axe Oy, les champs $\overrightarrow{B}_o$ et $\overrightarrow{B}_1$ sont, respectivement, suivants Oz et Ox ; donc les <u>flux</u> de ces champs à travers la bobine détectrice sont <u>nuls</u> : la présences de ces champs ne perturbent, donc, pas la détection.

2.4.2. Force électromotrice $e(t)$ induite dans la bobine détectrice

$$\overrightarrow{B} = K\overrightarrow{M} \quad \Rightarrow \quad \Phi = N\overrightarrow{B}\cdot S\vec{u}_y = NSK\overrightarrow{M}\cdot\vec{u}_y = NSKM_y$$

$$\text{soit : } \quad e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -NSK\frac{dM_y}{dt}$$

$$\text{avec : } \quad M_y = \overrightarrow{M}\cdot\vec{u}_y = M_o\left(u(\vec{u}_X\cdot\vec{u}_y) + v(\vec{u}_Y\cdot\vec{u}_y)\right) = M_o\left(-u\sin(\omega' t) + v\cos(\omega' t)\right)$$



$$\text{soit :}\quad e(t) = NSK\omega' M_o \Big(u\,\cos(\omega' t) + v\,\sin(\omega' t)\Big)$$

$$\text{ou :}\quad e(t) = V_0\cos(\omega' t) + V_{\frac{\pi}{2}}\cos(\omega' t) \qquad \text{tels que :} \left\{\begin{array}{lcl} V_0 & = & NKSM_o\omega' u \\ \\ V_{\frac{\pi}{2}} & = & NKSM_o\omega' v \end{array}\right.$$

2.4.3. On pourra représenter la fonction $\eta(\omega')$, définie par :

$$\eta = \frac{V_0}{V_{\frac{\pi}{2}}} = \frac{u}{v} = \Omega\tau = \Big(-\omega' + \gamma B_o\Big)\,\tau$$

$\eta(\omega')$ est une droite de pente $-\tau$, d'où la détermination de cette dernière..

Troisième partie
Détection synchrone du signal

3.1. Schéma de principe d'un détecteur synchrone

3.1.1. La constante K_0 est homogène à une tension.

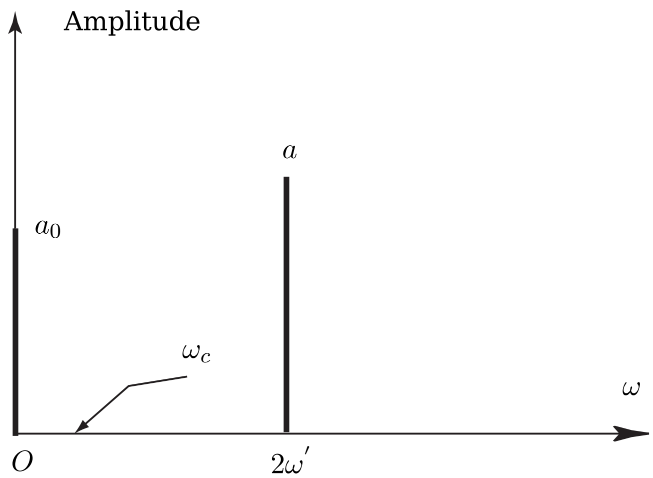
3.1.2. Expression de $v_{MUL}(t)$

$$\begin{aligned} v_{MUL}(t) &= \frac{1}{K_0}x_1(t)x_2(t) \\ &= \frac{1}{K_0}v_{DEP}(t)e(t) \\ &= \frac{V}{K_0}\cos(\omega' t + \Delta\varphi)\left(V_0\cos\omega' t + V_{\frac{\pi}{2}}\sin\omega' t\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{MUL}(t) = \frac{V}{K_0}\cos(\omega' t + \Delta\varphi)\left(V_0\cos\omega' t + V_{\frac{\pi}{2}}\sin\omega' t\right)}$$

3.1.3.

$$\boxed{v_{MUL}(t) = \frac{V}{2K_0}\left(\underbrace{V_0\cos\Delta\varphi - V_{\frac{\pi}{2}}\sin\Delta\varphi}_{\text{Composantes continues}} + \underbrace{V_0\cos\left(2\omega' t + \Delta\varphi\right) + V_{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2\omega' t + \Delta\varphi\right)}_{\text{Composantes variables}}\right)}$$



3.1.4. La fréquence de coupure ω_c du filtre est très inférieur à $\omega^{'}$: les composantes variables de fréquences $2\omega^{'}$ sont, donc, atténuées et le filtre (d'amplification A) ne laisse passer que les composantes continues. Soit :

$$\boxed{v_{FPB}(t) = \frac{V}{2K_0} A \left(V_0 \cos\Delta\varphi - V_{\frac{\pi}{2}} \sin\Delta\varphi \right)}$$

3.1.5. D'après l'expression précédente, on peut remarquer facilement que :

$$v_{FPB}(t) = \left(\frac{VA}{2K_0}\right) V_0 \quad \text{pour} \quad \boxed{\Delta\phi = 0}$$

et

$$v_{FPB}(t) = -\left(\frac{VA}{2K_0}\right) V_{\frac{\pi}{2}} \quad \text{pour} \quad \boxed{\Delta\phi = \frac{\pi}{2}}$$

Ce qui nous permet d'étudier séparément les termes : V_0 et $V_{\frac{\pi}{2}}$

3.2. Étude du circuit déphaseur

3.2.1. Fonction de transfert

Le théorème de Millmann (Loi des noeuds aux termes du potentiel) donne :

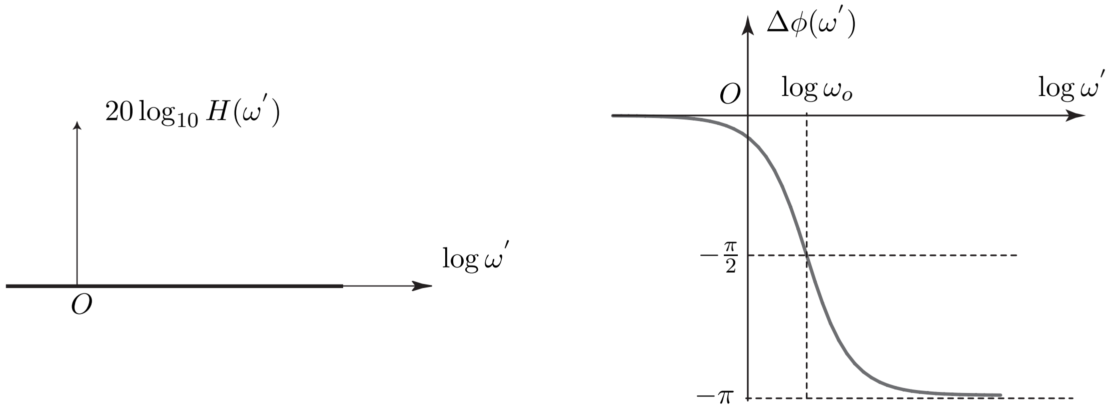
$$\frac{2}{r}\underline{v}^{-} = \frac{\underline{v}_{REF}}{r} + \frac{\underline{v}_{DEP}}{r} \quad \text{et} \quad \underline{v}^{+}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}\right) = \frac{\underline{v}_{REF}}{R}$$

Soit : $$\boxed{\underline{H}(j\omega^{'}) = \frac{\underline{v}_{DEP}}{\underline{v}_{REF}} = \frac{1 - jRC\omega^{'}}{1 + jRC\omega^{'}}}$$

3.2.2. Amplification $H(\omega^{'})$ et déphasage $\Delta\phi$

$$\boxed{H(\omega^{'}) = |\underline{H}(j\omega^{'})| = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta\phi = \arg \underline{H}(j\omega^{'}) = -2\arctan(RC\omega^{'})}$$

3.2.3. Diagramme de Bode



3.2.4. $v_{FPB}(t) = V_M \cos\omega^{'} t$ et la fréquence $f' = 10\,kHz$

Le déphasage $\Delta\phi = -\dfrac{\pi}{2}$ pour $RC\omega^{'} = 1$ avec $\omega^{'} = 2\pi f'$

Soit : $$\boxed{R = \frac{1}{2\pi f' C} = 1,6\ k\Omega}$$

3.2.5. pour prélever la tension $v_{REF}(t)$ en phase avec le champ $\overrightarrow{B}_2$, il suffit d'avoir le déphasage $\Delta\phi$ nul. Ce qui est réalisable pratiquement en prenant une résistance R nulle : ce qui revient à remplacer le circuit *déphaseur* par un *suiveur* !